Soluții – clasa a IX-a

1

Notam A', B', C' mijloacele laturilor; D, E, F picioarele inaltimilor

AH=2OA' 3p

AH$\cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ 4p

2

a) Vectorii se aduna dupa regula triunghilui. 1p

Avem |OA-OB|$\le$OM $\le$|OA+OB|, egalitatile revenind cand punctele devin coliniare 2p

Locul geometric este coroana centrelor in O cu raze 5r-2r=3r, respectiv 5r+2r=7r

Verificare reciproca 1p

Total 4p

b) Renotam $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{ON}$ si avem $\vec{OM}=\vec{ON}+\vec{OC}$. Acelasi rationament 1p

coroane concentrice : cea interioara cu raze 4r=11r-7r si 8r=11r-8r, 1p

cea exterioara cu raze 14r=11r+3r, 18r=11r+7r 1p

Total 3p

3

Avem

$$\frac{a^2}{a^3+b}+\frac{b^2}{b^3+a}\ge\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3+a+b}=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2+1}=\frac{a+b}{a^2+b^2}\ge\frac{2\sqrt{ab}}{a^2+b^2}=\frac{2}{a^2+b^2}$$

4

Consideram cel mai restrans patrulater MNPQ care contine pe D in interiorul sau si are laturi paralele la axele sistemului ortonormant. Atunci este clar ca

MN+NP=1

Notam cu A=aria$_D$. Atunci este trivial ca

$$A<\text{aria}_{MNPQ}=MN\cdot NP\le\left(\frac{MN+NP}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Din faptul ca pr$_{(oX}$D si pr$_{(oY}$D sunt segmente deducem ca

$$\sum d_i \geq MN,\ \sum d_i \geq NP \Rightarrow \sum r_i \geq \frac{MN+NP}{4} = \frac{1}{4}$$

unde d_i si r_i sunt respectiv diametrul si raza discului D_i. Din (I.M.) avem ca

$$\sum r_i^2 \geq \frac{1}{30}\left(\sum r_i\right)^2$$

De unde rezulta ca

$$A = -\ \pi \sum r_i^2 \geq \frac{\pi}{30}\left(\sum r_i\right)^2 \geq \frac{\pi}{3}\frac{1}{160} > \frac{1}{160}$$